

1 / Taquímetro electrónico con medida de distancia electro-óptica.
2 / La referencia "nubes de puntos" es la que comúnmente se utiliza para denominar al conjunto de los datos espaciales de una o varias capturas.

3 / El proceso de "registro" de una "nube de puntos" consiste en determinar las posiciones relativas entre las diferentes capturas del escáner para poder tener un solo conjunto de datos que permita definir todo el modelo.

4 / ...edificios como el museo Guggenheim de Bilbao, los proyectos de Einsemann en Santiago, la nueva remodelación del mercado de Sta. Caterina en Barcelona de E. Miralles y otros.



ESTRATEGIAS DE MODELADO FORMAL EN LA SAGRADA FAMILIA

Andrés de Mesa, Joaquín Regot, M.^a Amparo Núñez Andrés y Felipe Buill Pozuelo

1. Introducción

Las técnicas de levantamiento de obras arquitectónicas están en continuo cambio favorecidas por el uso de nuevos aparatos que permiten, en muy poco tiempo, conseguir una gran cantidad de información con precisiones similares a las determinadas con instrumental topográfico de uso común como las estaciones totales 1. Los diferentes tipos de aparatos se adaptan a las características del levantamiento permitiendo trabajar a diferentes distancias, desde pocos decímetros para pequeñas esculturas o piezas arqueológicas, a centenares de metros para el control métrico de conjuntos monumentales, adaptándose a las precisiones requeridas para definir de forma óptima al objeto según su tamaño y forma.

El sistema más utilizado para este tipo de levantamiento está basado en la captura de posiciones espaciales, puntos en 3d, mediante la lectura de distancias que producen los escáneres láser de tipo terrestre aplicando barridos sistemáticos. Esta técnica de barrido láser, utilizando sensores terrestres, permite adquirir cantidades masivas de puntos con precisiones milimétricas de una manera más rápida que las técnicas habituales de levantamiento.

El resultado del levantamiento con este tipo de sensores es un conjunto de diversas "nubes de puntos" 2 que re-

cogen la geometría del objeto, que es necesario relacionarlas entre sí mediante referencias locales o absolutas para obtener un conjunto posiciones 3d uniforme y muy preciso.

Los sistemas gráficos informáticos, adaptados para la gestión de este tipo de datos, facilitan los procesos de determinación y registro 3 de las "nubes de puntos", (datos de posición en tres dimensiones de los objetos). Una vez controlada esta etapa, estos sistemas permiten elaborar el modelo virtual, mediante la triangulación de las posiciones 3d obtenidas utilizando los sistemas de generación de mallas. A partir de esta primera solución formal, es posible utilizar diferentes tipos de entidades tridimensionales para elaborar el modelo virtual del objeto escaneado. Se pueden aplicar de diferentes maneras de resolver su forma virtual, según las necesidades de aquello que se quiera obtener de él, y el resultado puede ir desde un simple modelo 3d a colores, hasta un detallado análisis de precisión del comportamiento del material de sus superficies.

El objeto de este artículo es explicar los problemas y posibles soluciones que se producen en un proceso de levantamiento arquitectónico sobre todo debido a las limitaciones que actualmente tienen los programas informáticos, propios de estos procesos,

para generar las formas básicas de un modelado tridimensional.

En este tipo de programas se suelen integrar las formas geométricas más comunes de los trabajos de ingeniería y arquitectura (como el plano, el cilindro, el cono,...) pero no tienen en cuenta superficies más complejas que en muchas ocasiones permitirían determinar formas particulares que se producen en la construcción o en diseños de arquitectura especiales. Este problema tiene su origen en el tipo de aplicaciones a la que están destinados, fundamentalmente el control de calidad en la producción o el control de funcionamiento de grandes plantas industriales. Los problemas que pueden aparecer en edificios cuyo diseño integra formas libres 4, no permiten la aplicación inmediata de este tipo de programas y requieren soluciones particulares para el control de su modelado tridimensional.

Este trabajo muestra la metodología utilizada para obtener y modelar la superficie interna de una parte del ventanal de la nave central del templo de la Sagrada Familia. Este proceso de ingeniería inversa permitirá optimizar la fabricación de nuevos ventanales para la obra del templo de la Sagrada Familia.

El proceso se desarrolla en cuatro pasos: captura de datos espaciales, se-



Fig.1. Ventanal objeto de estudio.

lección y filtrado de estos datos, ajustes de la forma de la superficie y representación gráfica tridimensional.

2. Objetivo del trabajo

El modernismo es una de las corrientes arquitectónicas más importante en Cataluña en el siglo XX, y Antonio Gaudí su principal representante. Uno de los trabajos más singulares de este arquitecto es el templo de la Sagrada Familia actualmente en construcción, donde aparece el tema de nuestro estudio, el interior de un ventanal de la

nave principal del lado que corresponde a la Fachada de la Pasión.

Este ventanal está compuesto por elementos prefabricados de piedra artificial que componen las diferentes piezas de las superficies que lo conforman. Las formas geométricas que se utilizaron al definir su forma fueron superficies cuadráticas y superficies planas cuya composición alcanza unas dimensiones de 12 metros de ancho por 16 metros de altura (figura 1).

La finalidad del trabajo efectuado fue conseguir un modelo virtual completo similar al de la ventana real cons-

truida. Para ello se propusieron dos caminos de actuación. Un primer camino de tipo geométrico basado en la determinación de secciones planas de la superficie aprovechando las “nubes de puntos” tridimensionales. Este procedimiento terminaba de definir la forma final de la superficie, obteniendo líneas rectas de la superficie a partir de estas secciones planas aplicando un juego proyectivo basado en la regla general de las superficies regladas.

Un segundo camino de tipo matemático permitió establecer las superficies que componen el conjunto a par-

tir de la utilización de las ecuaciones generales de las superficies cuadráticas ajustadas por mínimos cuadrados. Una vez clasificadas estas superficies generales se obtuvo su geometría, posición y tipo de superficie (hiperboloide, paraboloide...) y con ello los parámetros necesarios para su generación virtual.

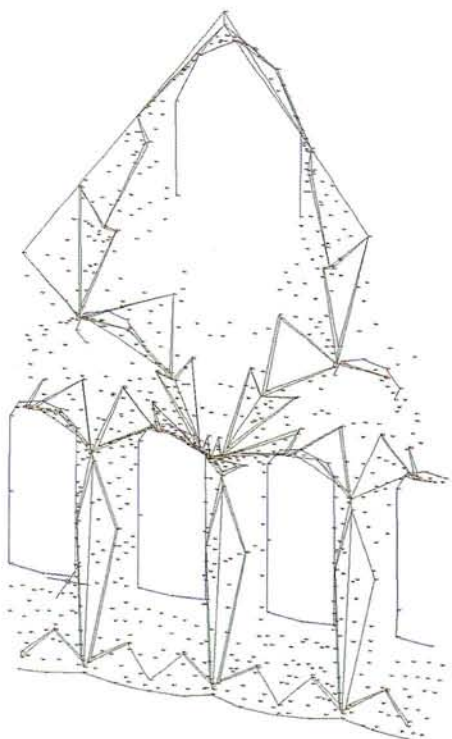
En ambos casos el proceso se completó con el estudio de las metodologías para la elaboración de las superficies tridimensionales a partir de los parámetros que las definen. El desarrollo de este trabajo se llevó a cabo aplicando un sistema de control paramétrico único para todas las superficies del ventanal, para poder que controlar el comportamiento de cada parte respecto al conjunto, lo que permitió realizar un análisis completo del objeto de estudio y a su vez determinar un modelo ideal partiendo de la toma de datos del modelo real.

3. Captura de datos

En el caso estudiado se utilizaron dos tipos de sistemas topográficos para la captura de datos espaciales. El primero de ellos responde a un tipo de trabajo discreto con identificación de detalles por parte del operador, el cual captura los puntos significativos y de relleno, empleando las estaciones totales de medida con láser Leica 705, y Topcon GPT 7000. En el segundo caso la toma se realiza de forma automática capturando de forma masiva una "nube de puntos", donde el operador únicamente selecciona la ventana de captura y la resolución espacial, no produciéndose una selección de puntos en función de la calidad y representatividad de los



Fig. 2. Toma de datos topografía.



bordes, los cambios de pendiente, y puntos en cada superficie para tener suficiente redundancia, para poder ajustar correctamente cada cuádrica de forma independiente. Debido a la falta de visibilidad, por los elementos situados en planos anteriores que ocultan parte del ventanal, el número de puntos capturados no es excesivamente elevado en alguno de los elementos (de algunas decenas de puntos) (figura 2).

En el segundo caso tenemos "nubes de puntos" que será necesario unir para tener el modelo global del ventanal en el caso de trabajar con el modelo de la casa Cyrax puesto que el sensor Riegl permitía obtener en un solo barrido toda la superficie de la ventana. Al igual que en el caso de topografía clásica alguno de los elementos quedó representado por un número de puntos poco elevado debido a la imposibilidad de medir la superficie al estar oculta por otros elementos (sin embargo, en general, el número de puntos es muy superior) (figura 3).

Otro de los trabajos realizados en campo, y necesario para poder relacionar las "nubes de puntos" tomadas mediante estación total y escáner láser, fue la toma de puntos de control que permitieran realizar la transformación entre los sistemas de coordenadas a los que estaban referenciados uno y otro trabajo. En este caso y para tal fin se dispusieron puntos de control materializados por dianas planas y cilindros de alta reflectividad, de los que se disponían coordenadas en el sistema establecido por topografía, eje x en la dirección de la nave, eje z vertical y eje Y ortogonal a ambos y al ventanal (figura 4). A partir del conoci-

mismos, en este caso se emplearon los sensores láser escáner Cyrax 2500 y Riegl LMS-Z420i.

La distancia de trabajo en ambos casos fue de aproximadamente 45 metros ya que tanto las estaciones, topográficas como los láser escáneres, se situaron frente al ventanal, en una plataforma estable en el balcón situado al otro lado de la nave, de este modo se evitaba tener visuales cuya inclinación produjera un error superior al estimado en principio como tolerable en la determinación de cada uno de los puntos.

En el primero de los casos (radiación topográfica) únicamente se realizó una captura discreta de la información espacial, definiendo los



i / Consiste en una transformación de coordenadas que considera in cambio de escala, un vector de traslación entre los dos sistemas y los tres giros entre las temas de coordenadas. De esta forma se pueden pasar las coordenadas tomadas en un sistema local a una "nube de puntos" a otro sistema coordinado con sólo conocer las coordenadas de tres puntos en los dos sistemas. En el caso topográfico el factor de escala es obligatoriamente la unidad.

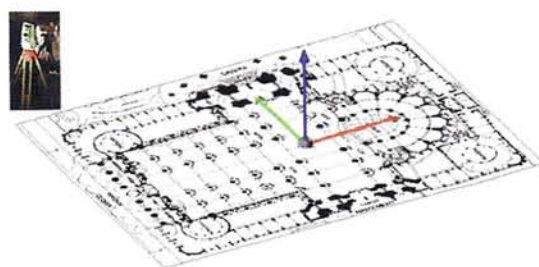


Fig. 3. Toma de datos scanner.

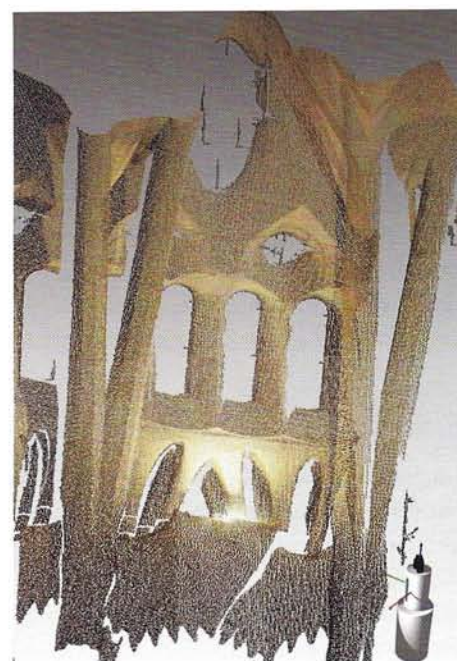


Fig. 4. Ejes de coordenadas.

miento de las coordenadas en dicho sistema y las correspondientes a la "nube de puntos" obtenida por láser escáner se calcularon los parámetros de transformación tridimensional de semejanza s que nos permitía llevar la "nube de puntos" (referenciada a un sistema arbitrario) al sistema anteriormente descrito.

Tanto en el caso topográfico clásico como en la captura de datos por barrido láser la posición de los puntos capturados está afectada por los errores producidos en la medida de ángulos y distancia, siendo este último el de mayor magnitud para la distancia de trabajo en nuestro caso. Para ambos casos la magnitud del error en distancia está entorno a 5mm.

4. Filtrado de los datos

Para un mejor tratamiento y comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos se dividió el ventanal en diferentes superficies con las que se trabajó de forma independiente.

En el caso topográfico este trabajo era cómodo al tener definidas las superficies y sus contornos, cambios de pendiente,... con un identificador para cada punto. Lo cual es totalmente imposible con la utilización del láser escáner por lo que se hace necesario un trabajo de depuración y tratamiento de la "nube de puntos" inicial mucho más laborioso y costoso. La manipulación de esta gran cantidad de datos es uno de los problemas que plantea este tipo de sistemas de medida, que será nece-

sario resolver en un futuro próximo si queremos que el trabajo con sensores de captura masiva sea realmente efectivo. Además, se ha de tener en cuenta que cualquier error en la depuración, dejando puntos que no pertenezcan a una superficie, nos conducirá al ajuste de una superficie errónea, ya que al trabajar en la mayoría de los casos con una resolución muy alta se encontrarán estos puntos en gran cantidad, dificultando su localización incluso mediante la utilización de filtros estadísticos como veremos en el siguiente epígrafe.

Otro factor a considerar es la corrección de errores ocasionado por diferentes factores que afectan a la señal como son el material de la superficie reflectante, color de la misma, rugosidad,...

que en casos especiales pueden presentar valores muy importantes (Schulz T. et al., 2004) (Núñez A. et al., 2005).

Por tanto, será muy importante establecer la metodología necesaria para separar las diferentes superficies, puesto que en caso contrario, podemos obtener superficies erróneas al ser muy difícil la detección de los puntos equívocos al encontrarse en gran cantidad.

5. Ajustes de superficies

La posibilidad de la determinación de superficies regladas alabeadas a partir de los datos requiere de un conocimiento a fondo de la geometría y la matemática analítica utilizada por los programas de CAD.

Se plantean dos vías de ajuste de superficies a los puntos. La primera, eminentemente gráfica, requiere de la determinación de curvas en la superficie. La segunda se obtiene a partir del análisis matemático y la determinación de las ecuaciones paramétricas de la superficie.

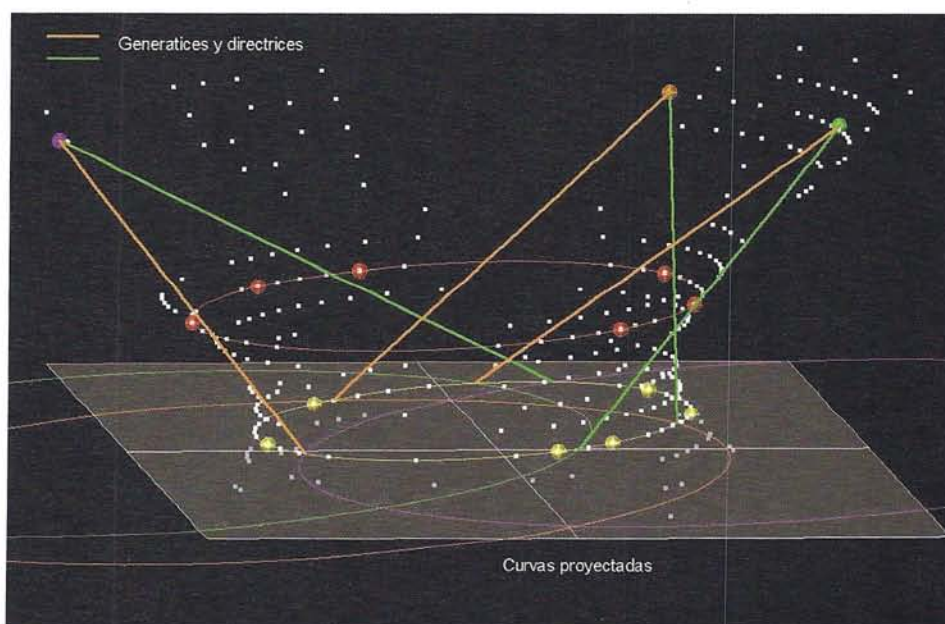
6.1. Proceso Geométrico

Con la base de datos obtenida mediante la captura y el filtrado de puntos del ventanal, como primera alternativa, se estudió la manera de definir las diferentes superficies del conjunto a través de un procedimiento geométrico. Para restringir el campo de actuación se dieron dos premisas: las superficies deberían ser regladas y de segundo grado. A partir de estas dos condiciones, como primer paso, se realizó la selección de un grupo de puntos de una de las superficies del conjunto con la intención de determinar tres curvas

6 / Los aparatos láser escáner para mediciones tridimensionales hacen una lectura ordenada de todas las posiciones espaciales que miden, puesto que los cabezales del aparato giran en torno a dos ejes perpendiculares entre sí, por lo tanto el resultado ofrece una matriz de puntos espaciales configurada por filas y por columnas. Como consecuencia, todos los puntos que corresponden a una fila o a una columna se encuentran sobre un mismo plano, un plano que siempre pasa por el centro de giro del rayo láser.

7 / El método general de determinación y clasificación de las superficies regladas alabeadas permite aplicar la proyección a un plano de dos curvas de la superficie desde un punto de la misma para establecer líneas rectas contenidas en la superficie.

Fig. 5. Obtención de curvas planas y generatrices.



planas que deberían pertenecer a la familia de las cónicas.

El método empleado para la selección de los puntos de una curva plana de la superficie, se realizó separando aquellos puntos del proceso de escaneado que corresponden al barrido de un paso del láser escáner 6. Mediante la interpolación de los puntos seleccionados se trazó el arco de una curva de segundo grado. Para definir los elementos que determinan a este tipo de curva, (centro ejes, vértices...), fue necesario aplicar la simetría afín. De esta manera, se pudieron trazar tangentes y perpendiculares a la curva [Sánchez Gallego, 1997], indispensables para obtener su trazado completo.

La determinación de las generatrices rectas que pertenecen a superficies alabeadas de segundo grado, se resolvió mediante la proyección de una de sus curvas, (obtenida con el procedimien-

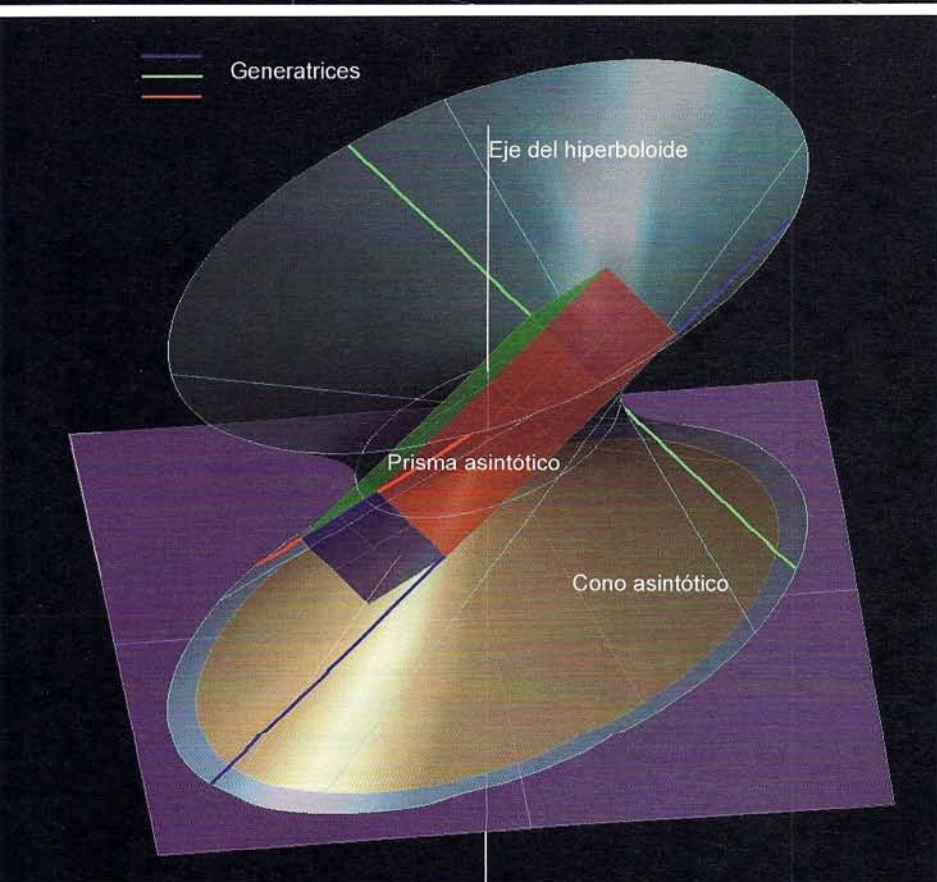
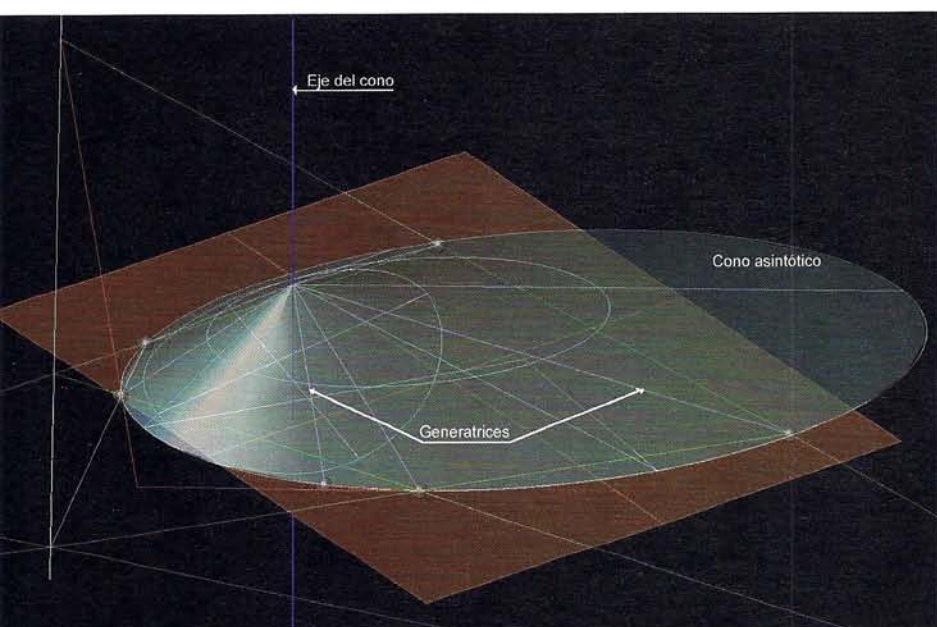
to que se ha expuesto), sobre el plano que contiene a otra curva cualquiera de la misma superficie. Para realizar esta proyección, se utilizó como centro de proyección un punto que también perteneciese a la superficie. De esta manera, uniendo el punto de proyección con el punto de intersección entre la curva proyectada y una de las curvas de la superficie se pudo determinar una generatriz recta de la superficie [Izquierdo Asensi, 1992] 7. Repitiendo este procedimiento tres veces, se pudieron obtener tres generatrices rectas de la superficie. Estas tres generatrices permitieron determinar el paralelepípedo asintótico de una superficie reglada de segundo grado, cuyo centro, en cualquiera de los casos corresponde al centro de este tipo de superficies (figura 5).

El proceso de obtención de este paralelepípedo se realizó por medio de la intersección de seis planos obtenidos por



Fig. 6. Determinación del cono asintótico y el eje de la superficie.

Fig. 7. Generación del hiperboloide elíptico.



8 / La obtención del cono asintótico permite obtener una sección perpendicular al eje (elipse). La excentricidad de la elipse resultado de esta sección define el factor de afinidad entre el hiperboloide de revolución, y el de garganta elíptica.

9 / El hecho de poder disponer de un cuadrilátero alabeado de un paraboloide hiperbólico conlleva el conocimiento de la orientación de sus planos directores y por consiguiente la dirección de su eje. Definir la posición del vértice y de sus parábolas principales es de fácil determinación.

la combinación de tres de las generatrices rectas, pertenecientes a la superficie, tomadas de dos en dos. El centro del paralelepípedo obtenido permitió definir el centro de la superficie reglada ya que son coincidentes. El tipo de superficie se determinó mediante el trazado de las perpendiculares desde el centro de la superficie a las generatrices utilizadas para obtener el prisma. Si estas perpendiculares son coplanares entre sí, la superficie es de revolución, y por tanto el eje de la superficie es la normal al plano de dichas perpendiculares. En caso contrario, el hiperboloide es elíptico, y la obtención de su eje se realiza mediante su cono asintótico 8 (figura 6).

El procedimiento geométrico empleado para la obtención de superficies regladas, que corresponden a hiperboloides de una hoja, es extensible a la generación de paraboloides hiperbólicos. En este caso, la obtención del paralelepípedo asintótico mediante tres generatrices de la superficie, permite definir directamente un cuadrilátero alabeado perteneciente a este tipo de superficie, lo que es suficiente para definirla tridimensionalmente mediante programas de diseño asistido 9.

A partir de estos datos obtenidos geoméricamente, se pueden establecer los parámetros necesarios para generar este tipo de superficies mediante los diversos procedimientos de modelado tridimensional con los que disponen los programas de modelado virtual [Regot, Mesa, 2005c].

En este caso, basta aplicar una afinidad, entre cualquier sección elíptica del hiperboloide y la circunferencia que tiene por diámetro su eje mayor. Si este proceso de transformación incluye una de las generatrices, la determinación

10 / Entendemos como incertidumbre la desviación típica asociada al valor estimado, y como región de incertidumbre al área en cuyo interior se encuentra el valor estimado con una cierta probabilidad, que en el caso de estar trabajando con errores estándar sería del 68%.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = -1$$

(1)

de un hiperboloide de revolución es inmediata. En cambio, aplicando el mismo factor de afinidad sobre esta figura, pero en sentido inverso, se obtiene el hiperboloide elíptico que contiene las dos curvas iniciales, las tres generatrices que han generado el prisma asintótico y la “nube de puntos” con la que se ha iniciado el proceso. De esta manera, se puede establecer los diferentes cuerpos que componen el conjunto arquitectónico del ventanal (figura 7).

6.2. Proceso analítico

Se procede a la determinación de puntos pertenecientes a cada superficie mediante los modos de selección de entidades que ofrecen los programas de gestión de “nubes de puntos”. En este proceso la dificultad de establecer los puntos de cada superficie depende de la calidad y de las características del aparato de captura, ofreciendo ventajas aquellos aparatos que permiten establecer características y propiedades no relacionadas directamente con la geometría de la superficie como la reflectividad, el color etc.

Después de la separación de los puntos en diferentes superficies se trataron éstas de forma independiente, de modo que no era necesario considerar los condicionantes geométricos existentes entre ellas. Únicamente nos centramos en el hecho de que cada uno de los puntos pertenecía a la superficie correspondiente y por tanto para cada uno de ellos se podía plantear una expresión del tipo (1) que corresponde a la ecuación general de las superficies cuadráticas, en la que tendremos como incógnitas los parámetros A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Por tanto y para poder determinar cada superficie necesitaremos conocer estos 9 parámetros, siendo necesario disponer para su estimación de al menos 9 puntos en cada una de ellas, distribuidos homogéneamente; con el inconveniente de que no tendremos una estimación del error asociado a tal determinación. Este problema se ve subsanado por el hecho de disponer de una cantidad de puntos, y por tanto de ecuaciones, superior al estrictamente necesario. De esta forma para cada una de las superficies se podrá resolver el sistema de ecuaciones mediante un ajuste mínimo cuadrático por el método de observaciones indirectas, método que adapta una superficie de forma que la sumatoria de los residuos al cuadrado sea mínima. La ventaja de este método es que junto con el valor de los parámetros que definen cada una de las superficies nos dará una estimación de la incertidumbre 10 de los mismos, así como la desviación de cada uno de los puntos a la superficie ajustada.

6.2.1. Análisis

Las soluciones obtenidas en el ajuste son sometidas a una serie de test estadísticos que nos permiten determinar la bondad de las mismas y detectar los posibles puntos afectados por un error en la propia observación o no pertenecientes a la superficie. Para ello se analizó la fiabilidad interna y externa (parámetros de homogeneidad), redundancias, test W-Baarda y el mínimo error detectable, fijándose los parámetros de nivel de fiabilidad y potencia del test en $\alpha=0.1\%$ y $\beta=80\%$

respectivamente (Chueca et al., 1999) (Wolf P.R. et al., 1997).

Las observaciones que no superan estos test son eliminadas y se recalcula la solución. Aproximadamente entre el 1% y el 5% de los puntos tuvieron que ser eliminados de cada una de las superficies, en el caso de emplear observaciones topográficas. Esto supone la búsqueda y eliminación de 1 a 3 puntos.

Esta “depuración” se ve dificultada, y en ocasiones de imposible solución, en el caso de emplear sensores láser escáner puesto que dejar una pequeña zona que no pertenezca a la superficie a calcular supone introducir hasta centenares de puntos erróneos, lo que no permite su localización de forma eficiente, ya que estos puntos se encuentran concentrados en una zona que modifica la geometría de la superficie.

Tras conseguir una solución adecuada se procedió a la clasificación de las siete superficies que se había separado como cuádricas, que son las zonas que rodean los tres óculos superiores y la parte superior de las cuatro ventanas inferiores. Aunque en principio los fallos y jambas de las mismas pudieran dar la impresión de corresponder a superficies cuádricas se comprobó que no se cumplía la ecuación general para los puntos de las mismas.

Es necesario indicar la dificultad en la determinación de las ventanas inferiores puesto que se disponía de partida de un 40% de la superficie total visible en ese lateral, lo que se vio disminuido por estar parte de la superficie oculta por las columnas en el caso de las ventanas extremas.

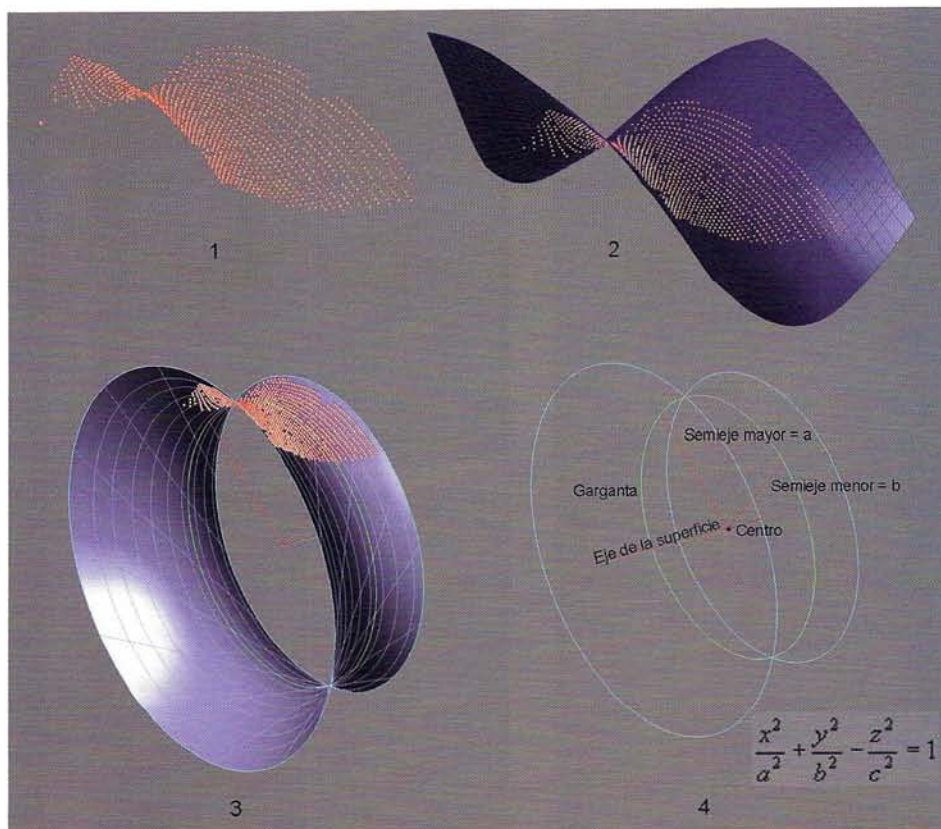


Fig. 8. Proceso de la obtención del modelo analítico y los parámetros de la superficie.

6.2.2. Clasificación de las superficies

Una vez obtenidos los coeficientes de la ecuación general procedemos a su clasificación mediante la cual obtenemos:

- Tipo de superficie
- Magnitud de los semiejes
- Coordenadas del centro
- Rotaciones para los tres ejes ϖ, ϕ, κ



Para las magnitudes de los ejes podemos indicar que los valores obtenidos para las superficies 2, 3, 4, 5, 6, y 7, que en principio debían ser la misma, son coincidentes en el orden del centímetro. El parámetro que mayor variación experimenta es la orientación de la superficie en función del número de puntos y la distribución de los mismos, que puede ser debido a los desplazamientos que sufren las piezas prefabricadas en su colocación.

Posteriormente la ecuación general de los hiperboloides de una hoja se transforma en su expresión paramétrica para su representación gráfica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

6.2.3. Resultados obtenidos

Las superficies calculadas después de la eliminación de los puntos erróneos, en el caso topográfico, son clasificadas de forma correcta para todos los casos, resultando superficies cuádricas del tipo

hiperboloide, los valores analíticos que definen su forma se encuentran con diferencias menores de 5mm, y los giros se determinan dentro de márgenes aceptables ($<1^\circ$). El número de puntos considerados para poder determinar correctamente las superficies pequeñas es de cerca de 30 puntos, repartidos homogéneamente por todo el elemento considerado, representando este en ocasiones un valor en porcentaje inferior al 25% del total de la superficie.

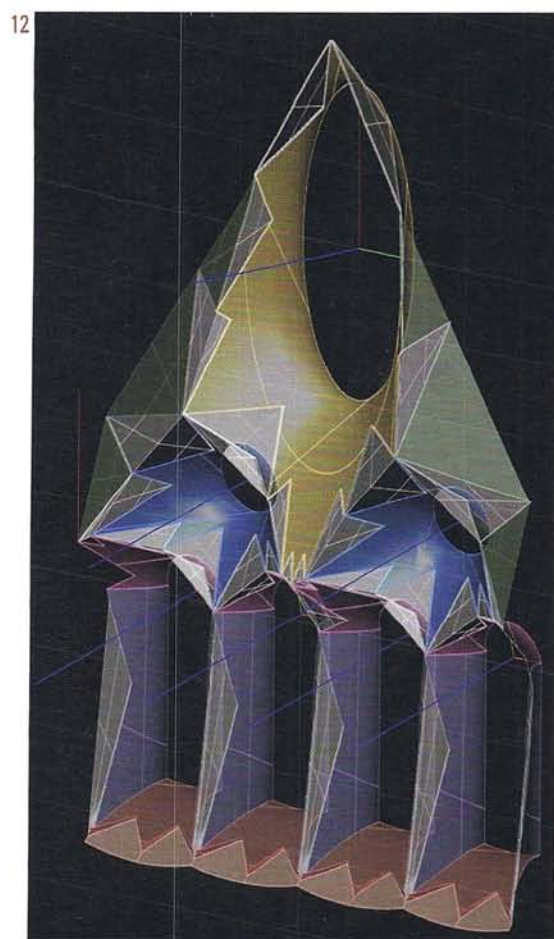
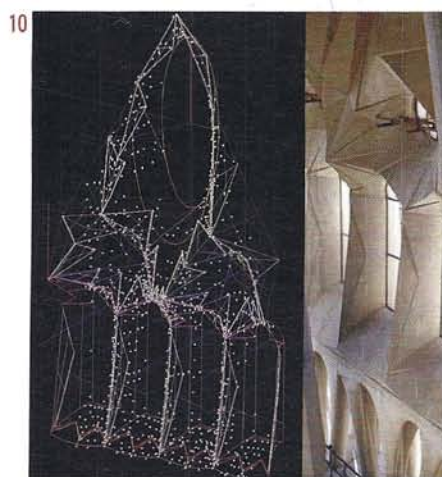
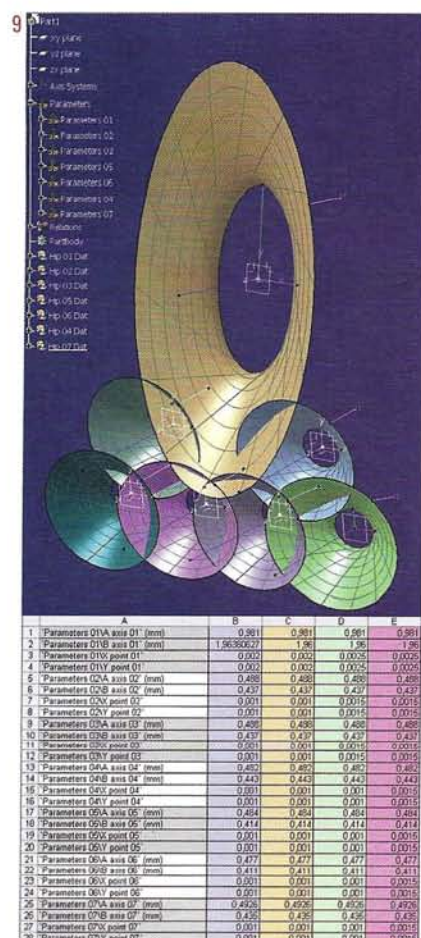
En el caso del barrido con láser escáner se consiguen resultados similares (no mejores por ampliar el grado de libertad de forma importante), pero se hace más difícil el proceso de limpieza y depuración de puntos erróneos (figura 8).

7. El modelo tridimensional de la superficie de la ventana

En comparación con el proceso elaborado a partir de geometría tridimensional, el estudio de la forma del

ventanal realizado mediante el análisis matemático de las “nubes de Puntos”, dio un resultado mucho más preciso y versátil para controlar las superficies que lo componen.

Por esta razón, la generación tridimensional del ventanal del templo de la Sagrada Familia, (estudiado mediante ecuaciones matemáticas obtenidas del análisis de diversas “nubes de puntos”), se ha desarrollado en dos partes. En la primera parte, se establecieron los criterios necesarios para transformar las ecuaciones matemáticas en superficies modeladas tridimensionalmente que formen parte de la estructura de un único conjunto. Para llevar a cabo este primer cometido, fue necesario crear un riguroso sistema paramétrico que permitiese modificar la posición, el tamaño y la orientación de cada una de las superficies que componen el ventanal, de forma interactiva y en relación con el resto del conjunto. La segunda parte de este trabajo, se dedicó a concretar



la forma definitiva del ventanal, inicialmente construido mediante una “infraestructura” paramétrica matemática y un conjunto de superficies definidas a través de su forma geométrica pura. Como consecuencia, en esta etapa fue necesario realizar una serie de operaciones tridimensionales de proyección, intersección y recorte, para transformar las superficies básicas en la forma definitiva del ventanal.

Sin embargo, el objetivo de esta parte del trabajo no sólo fue representar tridimensionalmente las superficies que definen las ecuaciones matemáticas calculadas previamente, sino utilizar las posiciones y las intersecciones entre las principales superficies del ventanal, como sistema de control de la precisión del proceso de cálculo realizado sobre las “nubes de puntos” para obtener los parámetros de la ecuación que define a cada superficie.

A partir de esta idea, se estableció una rigurosa “infraestructura” paramétrica de control mediante una tabla de cálculo que contenía los parámetros necesarios para controlar 7 hiperboloides elípticos (figura 9). Para poder trabajar a partir de un modelo formal único, capaz de abarcar los diferentes parámetros calculados en las ecuaciones para este tipo de superficies; cada uno de los hiperboloides fue definido a partir de un modelo genérico: el hiperboloide de revolución clásico. Todas las ecuaciones de los hiperboloides del ventanal que se calcularon dieron como resultado figuras elípticas, como consecuencia su forma geométrica se definió como la transformación paramétrica afín de un hiperboloide de revolución 11.

La adaptación de cada uno de ellos a la forma del ventanal, se llevó a cabo transformando los parámetros matemáticos de su ecuación en elementos

geométricos de control. Con estas condiciones, la superficie de cada uno de los 7 hiperboloides fue definida paramétricamente mediante: el centro y el eje de la superficie, el eje mayor y el eje menor de la garganta y un punto de paso de la superficie. Para llevar a cabo un control del tamaño, la posición y la orientación de cada superficie de forma interactiva, fue necesario crear una extensa tabla con los 5 parámetros para cada uno de los 7 hiperboloides elípticos tal como se han descrito. Mediante esta tabla, se consiguió modificar la forma, rectificar la posición y la orientación de cada uno de los siete hiperboloides, aplicando un control numérico muy preciso, que no sólo era independiente para cada uno de ellos, sino que también era independiente para cada uno de los elementos geométricos y la posición espacial que define a la superficie. De



Fig. 9. Generación de superficies mediante un sistema paramétrico.

Fig. 10. Modelado de jambas y antepechos de la parte inferior del ventanal.

Fig. 11. Recorte de los bordes de las superficies básicas.

Fig. 12. Superficies finales del modelo tridimensional del ventanal de la Sagrada Familia.

esta manera, los cálculos de cálculo para definir los parámetros de las ecuaciones que determinan a cada hiperboloide, realizados a partir de las “nubes de puntos”, podían verificarse gráfica y numéricamente con mucha precisión en cada momento y de forma constante.

El control tridimensional de las superficies de la parte inferior del ventanal, no se pudo llevar a cabo mediante una rigurosa parametrización, como la realizada en su parte superior. Las superficies de la parte inferior no corresponden a superficies cuadráticas simples con una definición geométrica conocida, capaz de ser definida mediante ecuaciones matemáticas. Por esta razón, su tratamiento formal se desarrolló mediante superficies de aproximación tipo “Patch”. Con este tipo de superficies se realizaron los primeros ensayos de formalización para los cuatro vanos inferiores del ventanal. Su aplicación a las superficies horizontales más bajas de todo el ventanal, nos permitió detectar, que en este caso se podía utilizar como solución definitiva un hiperboloide elíptico con eje mayor horizontal. La definición de la ecuación de este tipo de superficie, se realizó mediante el análisis matemático de la “nube de puntos” correspondiente, asignando al sistema de cálculo una condición adicional: el resultado debería corresponder a la superficie de un hiperboloide elíptico. De esta manera, se consiguió una aproximación muy ajustada entre la superficie resultante y la “nube de puntos” que la define (fig. 10). Las jambas verticales de la parte inferior del ventanal se resolvieron con superficies de “barrido” que se apoyan en dos guías

11 / Aunque la definición geométrica de afinidad entre un hiperboloide de revolución y uno elíptico pueda parecer compleja, la relación entre estas dos figuras no viene a ser otra cosa que el escalado de una de una de estas dos figuras, en relación a la otra, según una sola dirección. Es evidente que, en este caso, la dirección de afinidad o escalado unidireccional, la define el eje mayor de la elipse principal del hiperboloide elíptico.

12 / La idea de proyectar las líneas del perímetro de recorte sobre la superficie, fue para resolver las pequeñas imprecisiones entre los vértices del perímetro de recorte, definidos topográficamente y la superficie del hiperboloide definida matemáticamente.

“verticales”, y que tienen como generatriz la sección horizontal que pasa por el centro de cada uno de los hiperboloides más bajos del ventanal.

La forma definitiva del ventanal se ha desarrollado en una segunda parte, íntegramente dedicada a recortar y conectar entre sí las diferentes superficies básicas definidas previamente en la estructura paramétrica. Para realizar este proceso, fue necesario establecer tridimensionalmente todas las generatrices rectas que configuran el perímetro definitivo de cada uno de los 7 hiperboloides. Sin duda alguna, esta parte fue una de las más complejas dentro del proceso de modelado tridimensional del ventanal. La forma “estrellada” del perímetro definido por líneas rectas que recorta a cada uno de los siete hiperboloides elípticos, obligó, en cada caso, a proyectar los vértices de la “estrella” perimetral sobre la superficie del hiperboloide en dirección de su normal 12. Sin embargo, para obtener una superficie alabeada recortada con precisión mediante líneas rectas, fue necesario proyectar por segunda vez estos mismos vértices sobre el plano de la garganta del hiperboloide (fig. 11). Como consecuencia, la posición tridimensional exacta de cada una de las líneas de recorte sobre la superficie del hiperboloide, quedó definida mediante la posición de su primera proyección y los extremos de las tangentes trazadas desde su segunda proyección a la elipse de la garganta 13. Todos los espacios residuales entre los hiperboloides recortados del ventanal, corresponden a superficies planas simples y por lo tanto son muy sencillas de definir, puesto que se trata de planos con perímetro triangular que

unen los vacíos producidos por los recortes rectilíneos de los hiperboloides (fig. 12). Con esta última operación, se dio por concluido el trabajo de modelar tridimensionalmente la forma definitiva de un ventanal del templo de la Sagrada Familia, estudiado a partir de diversas “nubes de puntos”, definido mediante varias ecuaciones matemáticas, controlado espacialmente de forma paramétrica, y formalizado en tres dimensiones a través de una geometría de superficies tipo NURBS [Regot, Mesa, 2004].

Referencias

- CHUECA M., BERNÉ J.L., HERRÁEZ J. (1999): Microgeodesia y redes locales. Ed. Paraninfo.
- IZQUIERDO ASENSI F. (1992): Ejercicios de Geometría Descriptiva I (sistema diédrico). Ed. Dossat Madrid 1992
- NUÑEZ A., BULL F., MUÑOZ F., (2005a): Comportamiento de un sensor láser escáner. Proceedings 6ª Semana de Geomática, Barcelona 2005.
- NUÑEZ A., BULL F. (2005b): Determination of ruled surfaces from clouds points. Proceedings 7th conference on Optical 3-D measurement techniques. Viena 2005.
- REGOT J., MESA A., (2005c) From analytic equations to graphic modeling definition of ruled surfaces. Proceedings 7th conference on Optical 3-D measurement techniques. Viena 2005.
- REGOT J., MESA A., (2004) Metodologías para la generación y análisis de superficies tridimensionales en la restitución virtual de la arquitectura. Proceedings 1st Congress Virtual city and Territory. Barcelona September 2004.
- SÁNCHEZ GALLEGO J. A. (1997) Geometría Descriptiva. Sistemas de proyección cilíndrica. Edicions UPC Barcelona, 1997.
- WOLF P.R., GHILANI C.D. (1997) “Adjustment computations. Statistics and least squares in surveying and SIG” John Wiley and sons, INC. 1997

http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadráticas/marco_cuadráticas.htm
<http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html>